Polynômes de Legendre

Notions abordées : Polynômes, espaces vectoriels euclidiens, distance à un sous-espace vectoriel.

Notations

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel.
On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes réel en l'indéterminée X et $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace vectoriel formé des polynômes de degré inférieur ou égal n.
On identifiera polynôme et fonctions polynomiales associées définies sur $[-1,1]$.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $\dfrac{\mathrm{d}^k P}{\mathrm{d}x^k}$ la dérivée $k^{\text{ème}}$ d'un polynôme P.

On considère, pour $n \in \mathbb{N}$, les fonctions polynomiales définies sur I par :

$$U_n(x) = (x^2-1)^n \text{ et } P_n(x) = \frac{1}{2^n.n!}\frac{\mathrm{d}^n U_n}{\mathrm{d}x^n}(x)$$

En particulier, avec les conventions usuelles : $U_0(x) = P_0(x) = 1$.
A toute fonction polynomiale P, on associe le polynôme $L(P)$ définie sur I par :

$$L(P)(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((x^2-1)\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}(x)\right)$$

Partie I

Pour $P,Q \in \mathbb{R}[X]$, on pose $(P \mid Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\mathrm{d}x$.

1. Montrer que $(.|.)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
   Dans tout le problème, on suppose $\mathbb{R}[X]$ muni de ce produit scalaire et on note $\|.\|$ la norme euclidienne associée.
2. Montrer que L est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
3. On note L_n la restriction de l'endomorphisme L au départ de $\mathbb{R}_n[X]$.

3.a Montrer que L_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

3.b Calculer $L_n(1)$, $L_n(X)$ et $L_n(X^k)$ pour tout $2 \leq k \leq n$.

3.c Former la matrice de L_n relativement à la base canonique $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

4. Soit $P,Q \in \mathbb{R}[X]$. Observer que $(L(P) \mid Q) = (P \mid L(Q))$.

Partie II

1.a Calculer directement P_1, P_2 et P_3.

1.b Montrer que P_n est exactement de degré n et calculer le coefficient a_n de x^n dans P_n.

1.c Justifier que $P_0, P_1, \ldots, P_n$ forment une base de P_n.

2. En utilisant la formule de Leibniz pour calculer : $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left((x-1)^n(x+1)^n\right)$, établir que :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 (x-1)^{n-k}(x+1)^k$$

et en déduire les valeurs de $P_n(1)$ et $P_n(-1)$.

3.a Vérifier les relations :

(1) : $U'_{n+1}(x)-2(n+1)xU_n(x)=0$,

(2) : $(x^2-1)U'_n(x)-2nxU_n(x)=0$.

3.b En dérivant $n+1$ fois (1) et (2), montrer que la suite (P_n) vérifie :

(3) : $P'_{n+1}(x)=xP'_n(x)+(n+1)P_n(x)$,

(4) : $L(P_n)=n(n+1)P_n$.

3.c En exploitant la relation (4) et le résultat de la question I.4, établir que si $m\neq n$, $(P_n\,|\,P_m)=0$.

4.a Montrer que pour tout $Q\in\mathbb{R}_n[X]$, $(P_{n+1}\,|\,Q)=0$.

4.b En introduisant un polynôme Q de la forme $\prod_{i=1}^{p}(X-a_i)$ montrer que le polynôme P_{n+1} possède exactement $n+1$ racines distinctes, toute dans l'intervalle $]-1,1[$.

5.a Montrer que $(P'_{n+1}\,|\,P_n)=(n+1)\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\|P_n\|^2$.

5.b A l'aide d'une intégration par parties, établir que : $\|P_n\|^2=2-2\int_{-1}^{1}xP_n(x)P'_n(x)\mathrm{d}x$.

5.c En déduire que $\|P_n\|^2=\dfrac{2}{2n+1}$.

6. Etant donné un polynôme $P\in\mathbb{R}[X]$ et F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$, on note $d(P,F)$ la distance de P au sous-espace vectoriel F.
Calculer $d(X^{n+1},\mathbb{R}_n[X])$.

Correction

d'après ESIEE Amiens 1997

Partie I

1. $(.|.)$ est clairement un forme bilinéaire symétrique.
Pour tout $P\in\mathbb{R}[X]$, $(P\,|\,P)=\int_{-1}^{1}P(t)^2\mathrm{d}t\geq 0$ et si $(P\,|\,P)=0$ alors la fonction $t\mapsto P(t)^2$ est nulle car continue, positive et d'intégrale nulle sur $[-1,1]$. Par suite P est le polynôme nul car il possède une infinité de racines.

2. Soit $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ et $P,Q\in\mathbb{R}[X]$. $L(\lambda P+\mu Q)=\lambda L(P)+\mu L(Q)$ notamment par linéarité de la dérivation.
De plus $L:\mathbb{R}[X]\to\mathbb{R}[X]$ donc L est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

3.a La linéarité de L_n provient de celle de L. Le problème est de justifier que L_n est à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$.
Soit $P\in\mathbb{R}_n[X]$. On a $\deg\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\leq\deg P-1\leq n-1$ donc $\deg\left((x^2-1)\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}(x)\right)\leq 2+n-1=n+1$ puis $\deg L_n(P)\leq n$. Ainsi $L_n(P)\in\mathbb{R}_n[X]$.

3.b $L_n(1)=0$, $L_n(X)=(X^2-1)'=2X$, $L_n(X^p)=\left(p(X^2-1)X^{p-1}\right)'=p(p+1)X^p-p(p-1)X^{p-2}$.

3.c $\mathrm{Mat}_{(1,X,\dots,X^n)}L_n=\begin{pmatrix}0&0&2&&0\\&2&0&\ddots&\\&&6&\ddots&n(n-1)\\&&&\ddots&0\\0&&&&n(n+1)\end{pmatrix}$.

4. $(L(P)\,|\,Q)=\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((x^2-1)\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}(x)\right)Q(x)\mathrm{d}x\underset{\text{ipp}}{=}\left[(x^2-1)\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}(x)Q(x)\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}(x^2-1)\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}(x)\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}(x)\mathrm{d}x$

donc $(L(P)\,|\,Q)=-\int_{-1}^{1}(x^2-1)\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}(x)\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}(x)\mathrm{d}x$

or la symétrie de cette formule en P et Q permet de conclure $(L(P)\,|\,Q)=(P\,|\,L(Q))$.

Partie II

1.a $P_1=X$, $P_2=\frac{1}{2}(3x^2-1)$, $P_3=\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x$.

1.b $\deg U_n=2n$ donc $\deg P_n=\deg U_n-n=n$.

Le terme en x^n de P_n provient de la dérivation à l'ordre n du terme $\frac{1}{2^n n!}x^{2n}$ donc $a_n=\frac{1}{2^n}\times\frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

1.c La famille $(P_0,P_1,\ldots,P_n)$ est de degrés étagés (i.e. $\deg P_i=i$) c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. $P_n=\frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left((x-1)^n\right)^{(k)}\left((x+1)\right)^{(n-k)}=\frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{n!}{(n-k)!}(x-1)^{n-k}\frac{n!}{k!}(x+1)^k$

donc $P_n=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2(x-1)^{n-k}(x+1)^k$.

$P_n(1)=\frac{1}{2^n}\binom{n}{n}^2 2^n=1$ et $P_n(-1)=\frac{1}{2^n}\binom{n}{0}^2(-2)^n=(-1)^n$.

3.a $\left((x^2-1)^{n+1}\right)'=(n+1)\times 2x\times(x^2-1)^n=2(n+1)xU_n(x)$.

$(x^2-1)((x^2-1)^n)'=n\times 2x\times(x^2-1)^n=2nxU_n(x)$.

3.b En dérivant $n+1$ fois la relation (1), via la formule de Leibniz, on obtient :

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}\left(U_{n+1}(x)\right)\right)=\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}\left(2(n+1)xU_n(x)\right)=2(n+1)\binom{n+1}{0}x\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}\left(U_n(x)\right)+2\binom{n+1}{1}(n+1)\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(U_n(x)\right)$

donc $2^{n+1}(n+1)!P'_{n+1}(x)=2(n+1)x2^n n!P'_n(x)+2(n+1)^2 2^n n!P_n(x)$

puis $P'_{n+1}(x)=xP'_n(x)+(n+1)P_n(x)$.

En dérivant $n+1$ fois la relation (2), via la formule de Leibniz, on obtient :

$(x^2-1)U_n^{(n+2)}(x)+(n+1)2xU_n^{(n+1)}(x)+\frac{n(n+1)}{2}2U_n^{(n)}(x)-2nxU_n^{(n+1)}(x)-2n(n+1)U_n^{(n)}(x)=0$

donc $(x^2-1)U_n^{(n+2)}(x)+2xU_n^{(n+1)}(x)=n(n+1)U_n^{(n)}(x)$ i.e. $\left((x^2-1)U_n^{(n+1)}(x)\right)'=n(n+1)U_n^{(n)}(x)$

et donc $L(P_n)=n(n+1)P_n$.

3.c $n(n+1)(P_n\,|\,P_m)=(L(P_n)\,|\,P_m)=(P_n\,|\,L(P_m))=m(m+1)(P_n\,|\,P_m)$

donc $\left(n(n+1)-m(m+1)\right)(P_n\,|\,P_m)=0$.

Or $n\mapsto n(n+1)$ est injective et $n\neq m$ donc $n(n+1)\neq m(m+1)$ puis $(P_n\,|\,P_m)=0$.

4.a $(P_0,\ldots,P_n)$ est base de $\mathbb{R}_n[X]$ donc on peut écrire $Q=\lambda_0P_0+\cdots+\lambda_nP_n$.

Par suite $(P_{n+1}\,|\,Q)=\sum_{k=0}^{n}\lambda_k(P_{n+1}\,|\,P_k)=0$.

4.b Notons $a_1,\ldots,a_p$ les racines de multiplicités impaire du polynôme P_{n+1} appartenant à $]-1,1[$.

Posons $Q=\prod_{i=1}^{p}(X-a_i)$.

Le polynôme QP_{n+1} n'a que des racines de multiplicité paire dans $]-1,1[$, il est donc de signe constant sur $[-1,1]$ et par suite $\int_{-1}^{1}Q(x)P_{n+1}(x)\mathrm{d}x\neq 0$ (par non nullité de l'intégrale d'une fonction continue, non

nulle, et de signe constant). Par suite $p = \deg Q > n$.

Or P_{n+1} est de degré $n+1$ donc nécessairement $p \leq n+1$ et donc finalement $p = n+1$.

Par suite P_{n+1} possède $n+1$ racines distinctes dans $]-1,1[$.

De plus, puisque $\deg P_{n+1} = n+1$, on peut assurer qu'il n'y en a pas d'autres et que celles-ci sont simples.

5.a $P'_{n+1} = (n+1)a_{n+1}X^n + Q$ avec $\deg Q < n$ ou encore $P'_{n+1} = (n+1)\dfrac{a_{n+1}}{a_n}P_n + \hat{Q}$ avec $\deg \hat{Q} < n$.

Par suite $(P'_{n+1} \mid P_n) = (n+1)\dfrac{a_{n+1}}{a_n}(P_n \mid P_n) + (\hat{Q} \mid P_n) = (n+1)\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\|P_n\|^2$ car $(\hat{Q} \mid P_n) = 0$.

5.b $\|P_n\|^2 = \displaystyle\int_{-1}^{1} P_n(x)^2 \mathrm{d}x = \left[xP_n(x)^2\right]_{-1}^{1} - 2\int_{-1}^{1} xP_n(x)P'_n(x)\mathrm{d}x = 2 - 2\int_{-1}^{1} xP_n(x)P'_n(x)\mathrm{d}x$.

5.c $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{1}{2}\dfrac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \dfrac{2n+1}{n+1}$ donc $(P'_{n+1} \mid P_n) = (2n+1)\|P_n\|^2$.

De plus $P'_{n+1}(x) = xP'_n(x) + (n+1)P_n(x)$ donc $(P'_{n+1} \mid P_n) = (XP'_n \mid P_n) + (n+1)(P_n \mid P_n)$

or $(XP'_n \mid P_n) = \displaystyle\int_{-1}^{1} xP'_n(x)P_n(x)\mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{2}\|P_n\|^2$

donc $(2n+1)\|P_n\|^2 = 1 - \dfrac{1}{2}\|P_n\|^2 + (n+1)\|P_n\|^2$ puis $\|P_n\|^2 = \dfrac{2}{2n+1}$.

6. P_{n+1} est un vecteur normal à l'hyperplan $\mathbb{R}_n[X]$ de l'espace $\mathbb{R}_{n+1}[X]$.

Par suite $d(X^{n+1}, \mathbb{R}_n[X]) = \left\| \dfrac{(X^{n+1} \mid P_{n+1})}{\|P_{n+1}\|^2} P_{n+1} \right\| = \dfrac{\left|(X^{n+1} \mid P_{n+1})\right|}{\|P_{n+1}\|}$.

or $X^{n+1} = \dfrac{1}{a_{n+1}}P_{n+1} + Q$ avec $\deg Q < n+1$ donc $(X^{n+1} \mid P_{n+1}) = \dfrac{1}{a_{n+1}}\|P_{n+1}\|^2$

Par suite $d(X^{n+1}, \mathbb{R}_n[X]) = \dfrac{1}{|a_{n+1}|}\|P_{n+1}\| = \dfrac{2^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n+2)!}\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2n+1}}$.